FAKULTA APLIKOVANÝCH VĚD ZÁPADOČESKÉ UNIVERZITY V PLZNI
STUDENTSKÁ VĚDECKÁ KONFERENCE 2019

RBF aproximace s respektováním inflexních bodů

Martin Červenka[1]

1 Úvod

Radiální bázové funkce (zkr. RBF) jsou funkce, jejichž hodnoty jsou závislé pouze na vzdálenosti od středového bodu. Mezi takové funkce můžeme zařadit například Gaussovu RBF:

$$\varphi(r) = e^{-\alpha r^2} \tag{1}$$

kde r je vzdálenost od středu a α je tzv. *shape* parametr, který (nepřímo) udává rozptyl této funkce. RBF lze dále dělit na dvě skupiny – globální a lokální. Lokální RBF pracují pouze na určitém intervalu r, mimo tento interval jsou nulové; příkladem těchto funkcí jsou tzv. CSRBF (*compactly supported* RBF). Globální naopak tuto vlastnost nemají, mezi tyto funkce řadíme například již zmíněnou Gaussovu RBF. V této práci byla zvolena právě Gaussova RBF.

2 RBF Aproximace

Pomocí váženého součtu RBF je možné vytvořit funkce komplexnějších tvarů, které při správném použití dokáží dostatečně vhodně aproximovat libovolnou obecnou funkci. Aproximace pomocí RBF je založena na řešení přeurčené soustavy rovnic, která lze vyjádřit vzorcem 2 (viz např. [Skala (2013)]), ve kterém M je počet RBF, φ je zvolená RBF, ξ_j je středem j-té RBF, vektor $\mathbf{x_i}$ je pozice jednoho aproximovaného bodu s asociovanou skalární hodnotou h_i a vektor λ je neznámý vektor vah. Tuto soustavu lze poté řešit pomocí normálních rovnic.

$$\sum_{j=1}^{M} \varphi\left(\|\mathbf{x_i} - \xi_\mathbf{j}\|\right)\lambda_j = h_i \rightarrow \mathbf{A}\lambda = \mathbf{h} \tag{2}$$

Několik problémů je ze vzorce evidentních, například potřebujeme znát počet RBF M a jejich středové body ξ_j. V případě Gaussovy RBF potřebujeme dále znát i *shape* parametr(y).

3 Navržené řešení

Pro zjednodušení byl *shape* parametr globální a empiricky určen. Pro určení středových bodů RBF je nejpřirozenější přístup jejich umístění do extrémních bodů aproximované funkce. Tento přístup sice není optimální, ale je to jeden z nejrychlejších odhadů dosahující rozumných výsledků. I zde toto bylo uváženo a některé středy RBF byly umístěny do extrémních bodů.

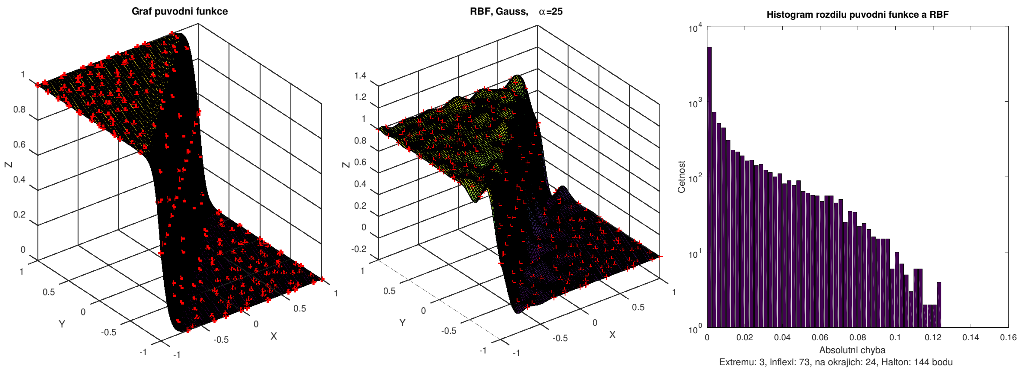
Další významné body mohou být inflexní body. Inflexní body jsou takové body, kde se mění konkávnost funkce. Inflexní body byly zvoleny jednoduchou úvahou a to z důvodu, že se jedná o další (druhý) stupeň derivace funkce (oproti prvnímu, kterým se hledají extrémy).

[1] student navazujícího studijního programu Inženýrská informatika, obor Medicínská informatika, e-mail: cervemar@students.zcu.cz

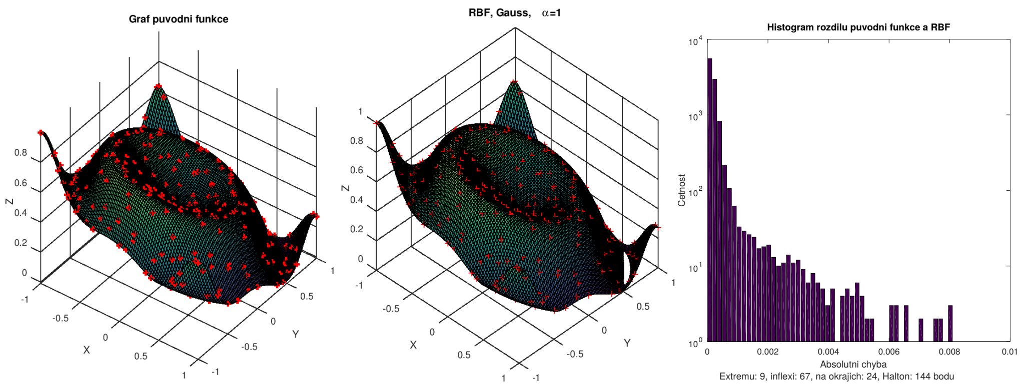
Následně pro pokrytí celé relevantní oblasti byly přidány body z Haltonova rozdělení a také byly přidány body na okraj intervalu, protože na okrajích bývají největší aproximační chyby.

4 Výsledky

Bylo otestováno několik funkcí, z toho dvě zde budou uvedeny. První funkce je hyperbolický tangens s ostrým zlomem. Aproximovat ostrý zlom je typicky pomocí RBF problém, ani v tomto případě tomu není jinak. I přes to však tato metoda pro takovou funkci podává dobrý výsledek (s maximální chybou $< 13\%$ a střední absolutní chybou $1.22 \cdot 10^{-2}$).



Druhá funkce je funkce skloněná sinová vlna. Aproximace v tomto případě dopadla velmi dobře (s maximální chybou $< 1\%$ a střední absolutní chybou $2.37 \cdot 10^{-4}$)



5 Závěr

Navržená metoda podává dobré výsledky i s fixním *shape* parametrem. Respektování inflexních bodů se testováním ukázalo jako vhodný přístup pro snížení chyby aproximace.

Poděkování

Tento příspěvek byl podpořen grantovými projekty GAČR 17-05534S a SGS 2019-016.

Literatura

V. Skala. Fast interpolation and approximation of scattered multidimensional and dynamic data using radial basis functions. WSEAS Transaction on Mathematics, 12(5):501-511, (2013)